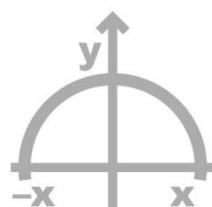


# חשבון אינפיניטסימלי



$$\{\sqrt{x}\}^2$$



## תוכן העניינים

1	1.	טורים עם איברים קבועים
9	2.	סדרות
18	3.	פונקציות של שני משתנים
28	4.	ngezorot chalikitot
34	5.	כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים
38	6.	פונקציות הומוגניות-משפט אוילר
46	7.	אינטרגרלים כפולים
52	8.	קייזון ואוכף לפונקציה של שני משתנים
54	9.	קייזון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים
56	10.	קייזון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')
59	11.	קייזון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים
61	12.	קייזון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

# חשבון אינפיניטסימלי

## פרק 1 - טורים עם איברים קבועים

### תוכן העניינים

- 1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים.
- 2. מבחני התכנסות לטורים.
- 3. התכנסות בהחלה והתכנסות בתנאי.
- 4. תרגילי תיאוריה.

## טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

### שאלות

#### טור גיאומטרי

בדקו את התכונות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

#### טור טלקופי

בדקו את התכונות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (11)$$

#### טור הרמוני מוכפל

12) בדקו את התכונות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad \text{ג.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ב.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad \text{ד.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad \text{ה.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad \text{צ.}$$

### תכונות אלגבריות של טורים

**(13)** בדקו את התכונות הטוריים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad \text{ג.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2} \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right) \quad \text{א.}$$

**(14)** חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$ , אם ידוע כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

### תשובות סופיות

**1)** מתכנס ל-  $\frac{11}{14}$ .      **2)** מתכנס ל-  $\frac{1}{3}$ .      **3)** מתבדר.

**4)** מתכנס ל-  $-\frac{64}{7}$ .      **5)** מתכנס ל-  $\frac{11}{12}$ .      **6)** מתכנס ל-8.

**7)** מתכנס ל-  $\frac{1}{2}$ .      **8)** מתכנס ל-  $\frac{1}{12}$ .      **9)** מתבדר.

$$\frac{1}{12} \quad \text{(11)} \quad S = \frac{1}{\ln 2} \quad \text{(10)}$$

**(12)** א. מתכנס.      ג. מתבדר.      ב. מתבדר.

ד. מתבדר.      ה. מתכנס.

**(13)** א. מתכנס.      ג. מתבדר.      ב. מתבדר.

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} \quad \text{(14)}$$

## מבחני התכנסות לטורים

### שאלות

#### מבחן ההתבדרות

1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+n}{n} \right)^n \quad \text{ד.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2} \quad \text{ג.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad \text{א.}$$

#### מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 2-5 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 1} \quad (2)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p \leq 1) \quad (5)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p > 1) \quad (4)$$

6) ענו על הסעיפים הבאים :

א. בדקו את התכנסות הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

ב. מצאו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$ .

#### מבחן ההשוואה ו מבחן ההשוואה הכלולי

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4 + n + 1}} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 10n + 1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2 + 1} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{n^2 + 1} - n \right) \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n + 2n} \quad (10)$$

### מבחן המנה ומבחן השורש

בדקו את התכונות הטוריים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n+2)} \quad (14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (20)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (19)$$

### תשובות סופיות

- |                  |               |
|------------------|---------------|
| (1) א-ו : מתבדר. | (2) מתבדר.    |
| (3) מתבדר.       | (4) מתכנס.    |
| (5) מתבדר.       | (6) א. מתכנס. |
| (7) מתכנס.       | (8) מתבדר.    |
| (9) מתבדר.       | (10) מתכנס.   |
| (11) מתבדר.      | (12) מתכנס.   |
| (13) מתבדר.      | (14) מתכנס.   |
| (15) מתכנס.      | (16) מתכנס.   |
| (17) מתכנס.      | (18) מתכנס.   |
| (19) מתכנס.      | (20) מתכנס.   |

## התכנסות בהחלט וההתכנסות בתנאי

### שאלות

#### מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

### התכנסות בהחלט וההתכנסות בתנאי

בשאלות 4-10 קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (8)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( -\frac{1}{\ln n} \right)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (10)$$

### תשובות סופיות

- |                   |                  |
|-------------------|------------------|
| (1) מתכנס.        | (2) מתכנס.       |
| (4) מתבדר.        | (5) מתכנס בהחלט. |
| (7) מתכנס בתנאי.  | (8) מתכנס בתנאי. |
| (10) מתכנס בתנאי. |                  |

## תרגילי תיאוריה

### שאלות

**1)** להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.  
 א. אם  $\sum a_n$  מתכנס ו-  $\sum b_n$  מתבדר, אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.  
 ב. אם  $\sum a_n$  מתבדר ו-  $\sum b_n$  מתכנס, אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.

**2)** להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.  
 א. אם  $\sum a_n^2$  מתכנס, אז  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט.  
 ב. אם  $\sum a_n$  חיובי ומתקנס, אז  $\sum \frac{1}{a_n}$  מתבדר.  
 ג. אם  $\sum a_n^2$  מתכנס, אז  $\sum a_n$  מתכנס.

**3)** הוכיחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$  מתבדר.

**4)** הוכיחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  חיובי ומתקנס אז גם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

**5)** א. נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .  
 הוכיחו כי  $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  מתבדר.  
 ב. נתון טור חיובי ומתקנס  $\sum a_n$ .  
 הוכיחו ש-  $\sum |a_n|$  מתבדר.

**6)** תהי  $(a_n)$  סדרה חיובית השואפת לאינסוף.  
 הוכיחו כי  $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$  מתכנס.

**7)** הוא טור אי-שלילי ומתקנס.

הוכיחו כי  $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$  מתכנס.

8) הוכיחו או הפריכו :

אם הסדרה  $(a_n)_{n \geq 1}$  מקיימת  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$  מתכנס.

9) נתנו כי  $a_n \geq 0$ .

הוכיחו כי :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

10) הוכיחו או הפריכו :

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  מתכנס והסדרה  $b_n$  חסומה אז  $a_n$  מתכנס.

11) הוכיחו : אם  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$  מתכנס בתנאי או  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתבדר.

12) הוכיחו או הפריכו :

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בתנאי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס בתנאי.

13) נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .  
הוכיחו או הפריכו :

א. אם מתקיימים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  לכל  $n$ , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיימים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  לכל  $n$ , אז הטור מתבדר.

14) נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכיחו כי  $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$  מתכנס.

15) נתונים שני טוריים חיוביים  $\sum a_n$ ,  $\sum b_n$ .

א. נתון שהטורים  $\sum a_n^2$ ,  $\sum b_n^2$  מתכנסים.

1. הוכיחו כי  $\sum a_n b_n$  מתכנס.

2. הוכיחו כי  $\sum (a_n + b_n)^2$  מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכיחו כי  $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$  מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התאוריה תוכלו למצוא באתר : [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

# חשבון אינפיניטסימלי

## פרק 2 - סדרות

### תוכן העניינים

1. היכרות עם סדרות .....	(ללא ספר) .....
2. חישוב גבול לפי כללי חישוב גבולות .....	9 .....
3. חישוב גבול לפי אוילר .....	11 .....
4. חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ .....	12 .....
5. חישוב גבול לפי מבחן המנה ו מבחן השורש .....	14 .....
6. חישוב גבול של סדרה רקורסיבית .....	15 .....
7. חישוב גבול לפי ההגדרה .....	17 .....

## чисוב גבול לפי כללי חישוב גבולות

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^3 + 10n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right) \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}} \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt[3]{3n^3 + 10n + 4n^4}} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}} \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right) \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2 + 1000n]{4n^2 + 2} \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}} \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^3 + 10n}} \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n) \quad (16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2) \quad (18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2 + 4n + 1} \quad (20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn}) \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1} \quad (21)$$

$$\cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

**הערה חשובה מאוד!**

בפתרון המלא, יופיע מקום המשטנה  $n$  – המשטנה  $x$ . יש להתייחס אל  $x$  כאל מספר טבעי!  
בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיות למספרים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

**תשובות סופיות**

$$4 \quad (2) \qquad 0 \quad (1)$$

$$0 \quad (4) \qquad \infty \quad (3)$$

$$1 \quad (6) \qquad -5 \quad (5)$$

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}} \quad (8) \qquad 1.5 \quad (7)$$

$$4 \quad (10) \qquad 0.25 \quad (9)$$

$$\ln 3 \quad (12) \qquad 2 \quad (11)$$

$$e^{\frac{1}{3}} \quad (13)$$

$$, \left( \lim a_n = \infty \right) \Leftarrow \left( a > 0, b = 0 \right) , \left( \lim a_n = \sqrt[5]{a/b} \right) \Leftarrow \left( b \neq 0 \right) \quad (14)$$

$$\left( \lim a_n = -\infty \right) \Leftarrow \left( a < 0, b = 0 \right)$$

$$\frac{k}{2} \quad (16) \qquad 2.5 \quad (15)$$

$$0.5 \quad (18) \qquad 0.5 \quad (17)$$

$$0.5 \quad (20) \qquad \frac{a-b}{2} \quad (19)$$

$$1 \quad (22) \qquad \frac{1}{3} \quad (21)$$

## чисוב גבול לפי אוילר

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n} \quad (7)$$

### תשובות סופיות

$$1 \quad (2)$$

$$e^{0.5} \quad (1)$$

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$e^{-12} \quad (6)$$

$$e^3 \quad (5)$$

$$e^{30} \quad (7)$$

## чисוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

### שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-5 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+2^{\frac{4n+1}{n}}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (5)$$

$$\text{רמז לשאלה 4: הוכיחו כי } a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

6) הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל- 0 :

$$\begin{aligned} a_n &= \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{3}} \right) \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{5}} \right) \cdots \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{2n+1}} \right) \\ &\text{א. } \alpha \in (0,1), a_n = n^\alpha - (n+1)^\alpha \end{aligned}$$

7) יהיו  $x$  מספר ממשי וחיוובי.

$$a_n = \frac{6n + \sqrt{x^2 n^2}}{3n + \sqrt{2}}$$

$$\text{הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 2$$

$$8) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{2^{3n^2-4} + 3^{2n^2+1} + 4^{1.5n^2+5} + 10^n}$$

**תשובות סופיות**

- |                |  |
|----------------|--|
| 4 (1)          |  |
| 0 (2)          |  |
| 1 (3)          |  |
| 0 (4)          |  |
| 1 (5)          |  |
| 6) שאלת הוכחה. |  |
| 7) שאלת הוכחה. |  |
| 9 (8)          |  |

## чисוב גבול לפי מבחן המנה ו מבחן השורש

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5)$$

### תשובות סופיות

0 (2)

0 (1)

$\frac{1}{4e}$  (4)

4 (3)

$\infty$  (5)

## чисוב גבול של סדרה רקורסיבית

### שאלות

בשאלות 1-3 נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).  
הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, a_1 = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, a_1 = 2 \quad (2)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right), a_1 = 2 \quad (3)$$

(4) יהו  $a > 0, x_1 > 0$ .

נגידר סדרה  $x_n$  ברקורסיה על ידי  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ , לכל  $n$ .  
הוכיחו שהסדרה מתכנסת ל-  $\sqrt{a}$ .

(5) יהי  $x_1 = a \geq 0$ .

נגידר סדרה  $x_n$  ברקורסיה על ידי  $x_{n+1} = \frac{1}{5} \left( x_n^2 + 6 \right)$ , לכל  $n$ .

א. מצאו את כל הערכים של הקבוע  $a$ , עבורם הסדרה עולה/ יורדת.

ב. קבעו האם הסדרה  $x_n$  מתכנסת עבור  $3 < a < 3.5$ .

(6) יהו  $0 < b_1 < a_1$ .

נגידר  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ , לכל  $n$ .

הוכיחו שהסדרות  $a_n$  ו-  $b_n$  מתכנסות ומתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

7) נתונה הסדרה  $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ .

א.1. נגידר סדרה חדשה  $b_n$  על ידי  $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ .

הניחו שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  קיימים וחשבו אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  קיים.  
בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכיחו שהסדרה  $a_n$  שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה  $a_n$  (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$  קיימים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

### תשובות סופיות

1) הגבול 2.

2) הגבול 1.

3) הגבול 1.

4) הגבול הוא  $\sqrt{a}$ .

5) א. אם  $a \leq 3$  הסדרה יורדת, אחרת היא עולה.

ב. לא מתכנסת.

6) שאלת הוכחה.

7) ב.1.  $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$

## чисוב גבול לפי ההגדרה

### שאלות

על סמך ההגדרה של גבול של סדרה, הוכחו כי :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n+3} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n+5) = \infty \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + 4n} - n \right) = 2 \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad (9)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

# חשבון אינפיניטסימלי

## פרק 3 - פונקציות של שני משתנים

### תוכן העניינים

1. מבוא לפונקציה של שני משתנים .....	18
2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים .....	20
3. משטחים מפורסמים .....	22
4. נספח - משטחים ממעלה שנייה .....	24

## מבוא לפונקציה של שני משתנים

### שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות :

- מצאו את תחום ההגדרה  $D$  של הפונקציה.
- שרטטו סקיצה של הקבוצה  $D$ .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x + y}{x - y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x + 4y} + \sqrt{x - 4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+4y}} + \frac{1}{\sqrt{x-4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y+4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left( \frac{x - 4y}{x + 4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln [x \ln(y - 4x)] \quad (10)$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (11)$$

### תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x + 1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x + 1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

## קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

### שאלות

**בשאלות 1-6**, מצאו תחום הגדרה, וشرطטו אותו ואת מפת קווי הגובה/רמה.

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטטו מפת קווי גובה :

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטטו את קו הגובה  $k$  :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x-y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y-x^2, x+y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

**14) נתונה הפונקציה**

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

- א. שרטטו את קו הגובה  $f(x, y) = 0$ .
- ב. לאילו ערכי  $C$  קו הגובה  $f(x, y) = C$  הוא קו רציף?  
ציררו את קו הגובה במקרה זה.

### הערות

\* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשפטים הנפוצים.

\*\* קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שותף ערך.

### תשובות סופיות

(1)  $x \neq 0$ , המישור ללא ציר ה- $y$ .

(2)  $x > 0, y > 0$ , הרביע הראשון ללא הצירים.

(3) כל המישור.

(4)  $x^2 + y^2 \leq 1$ , עיגול היחידה.

(5)  $y < x^2$

(6)  $y \geq 0$ , חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים וشرطוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## משטחים מפורסמים

### שאלות

זהו וشرطו את המשטחים בשאלות 3-1 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

4) זהו וشرطו את המשטחים הבאים :

א.  $z = 4x^2 + y^2 + 1$

ב.  $z = 3 - x^2 - y^2$

5) זהו כל אחד מהמשטחים הבאים :

א.  $25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100$

ב.  $25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0$

ג.  $x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0$

6) מצאו את החיתוך בין המשטח  $z = 12$  לבין המשטח  $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ .  
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

7) ענו על השעיפים הבאים :

א. זהו את המשטח  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206 = 0$

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח הנ"ל עם הישר

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$$

8) מצאו את החיתוך בין שני המשטחים  $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$   
 $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ .  
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

9) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. זהו את המשטח  $36 = 36z^2 + 4x^2 - 9y^2$  וشرطו אותו.
- ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח מסעיף א'.

• להלן נספח עם סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

### תשובות סופיות

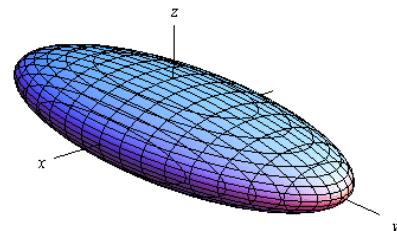
- 1) אליפסואיד.
- 2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
- 3) היפרבולואיד חד-יריעתי.
- 4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0,0,1)$  ונפתח כלפי מעלה.  
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0,0,3)$  ונפתח כלפי מטה.
- 5) א. אליפסואיד.  
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(1,2,0)$  ונפתח כלפי מעלה.  
ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה  $(0,0,10)$ .
- 6) החיתוך הוא מעגל  $x^2 + y^2 = 25$  שמרכזו בנקודה  $(0,0,12)$ .
- 7) א. ספירה שמרכזו  $(4,1,-10)$  ורדיוסה  $\sqrt{14}$ .  
נקודות החיתוך הן  $A(7,0,-12)$ ,  $B(\frac{59}{5}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9})$ .
- 8) החיתוך הוא המעגל  $x^2 + y^2 = 15$  שמרכזו בנקודה  $(0,0,7)$ .
- 9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- $y$ .  
ב.  $\ell_1 : (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$      $\ell_2 : (x, y, z) = (3, 2t, t)$

## נספח – משטחים ממעלת שנייה

משוואה:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם  $a=b=c$ , נקבל פזרע עם רדיוס  $a$  והחתכים הנילhim מעגלים.

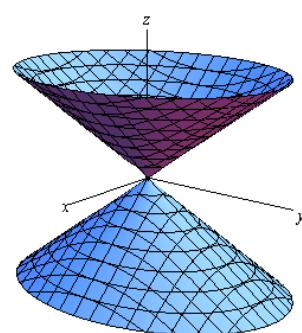
### אליפסואיד



משוואה:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם אליפסות. החתכים במישור  $zx$  ו-  $zy$  הם זוג ישרים החתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.  
 \* מרכז החגורות הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע בלבד באחד האגפים.

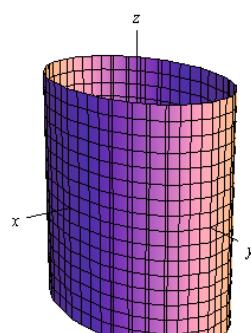
### חרוט אליפטי



משוואה:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $zx$  ו-  $zy$  הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא  $r^2 = x^2 + y^2$ , החתכים הנילhim מעגלים.  
 \* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע בלבד באחד האגפים.

### גליל אליפטי

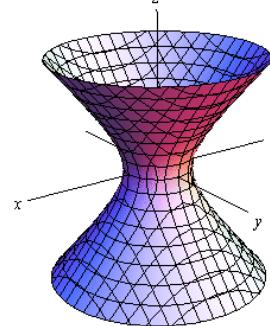


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור  $yx$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $yx$ . החתכים במישור  $zx$  ו-  $zy$  הם היפרבולות; כך גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

\* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים

### היפרבולואיד חד-יריעתי

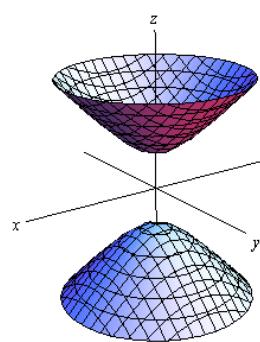


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור  $yx$ ; החתכים במישורים מקבילים למישור  $yx$ , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור  $zx$  ו-  $zy$  הם היפרבולות; כך גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

\* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים

### היפרבולואיד דו-יריעתי



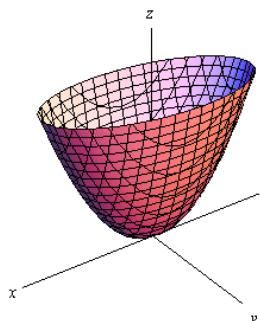
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור  $yx$  הוא נקודה (הראסית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $yx$  ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור  $zx$  ו-  $zy$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשנה המופיע ללא ריבוע.

\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  נפתח כלפי מטה.

### פרבולואיד אליפטי



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא זוג ישרים נחתכים

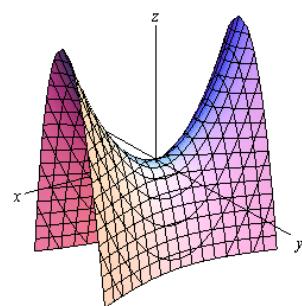
בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם היפרבולות; אלו מעל למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר  $x-y$  ואלו מתחת למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר  $-x-y$ .

החתכים במישור  $zx$  ו-  $zy$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

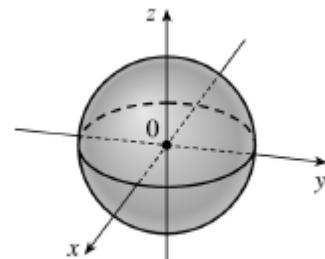
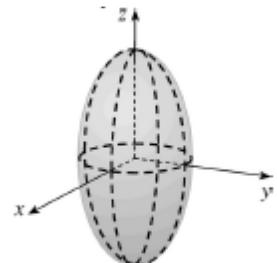
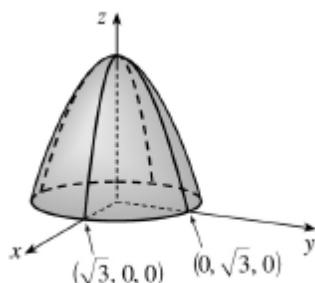
\* מרכזו הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשנה המופיע ללא ריבוע.

\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$

### פרבולואיד היפרבולי



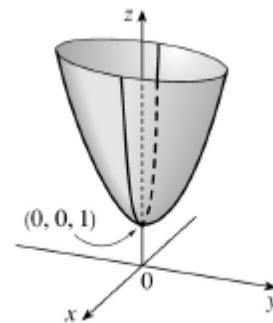
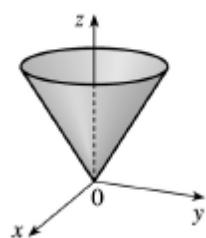
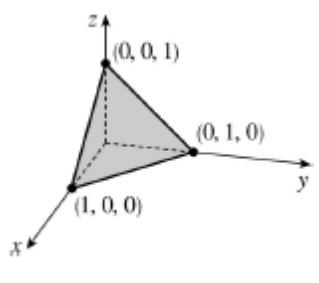
### דוגמאות שונות



$$z = 3 - x^2 - y^2$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$



# חשבון אינפיניטסימלי

## פרק 4 - נגזרות חלקיות

### תוכן העניינים

28 .....	1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון.
30 .....	2. נגזרות חלקיות מסדר שני

## נגזרות חלקיות מסדר ראשון

### שאלות

**בשאלות 1-6** חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \quad . f_x \text{ (רק)} \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y, z) = xy^2 z^3 \quad (6) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$\cdot z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) : \quad (7) \quad \text{נתון}$$

$$\cdot x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$$

$$\cdot f(x, y, z) = e^x \left( y^2 - \frac{1}{z} \right) : \quad (8) \quad \text{נתון}$$

$$\cdot \frac{\partial f}{\partial x} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right) : \quad \text{חשבו}$$

### הערת סימון

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

**תשובות סופיות**

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_z = 3xyz^2 \quad f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (6)$$

**7** שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = 4 \quad (8)$$

**הערת סימון**

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$
$f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$
$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}$

## נזרות חלקיים מסדר שני

### שאלות

**בשאלות 1-13** חשבו את כל הנזרות החלקיים עד סדר שני של הפונקציה הנתונה :

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y} (x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2) e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1+x^2+y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (13)$$

.  $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$ , עבור  $f'_{xy}(1,1)$  **14) חשבו**

.  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ , עבור  $f'_{xy}(1,1)$  **15) חשבו**

.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , עבור  $f'_{xy}(1,1)$  **16) חשבו**

.  $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$  : נתון **17**

.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,e)$  : חשבו :

### הערת סימונו

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1$	$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$
$f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}$	$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$
$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12}$	$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}$

## תשובות סופיות

$$f_y = -2x^2y + 10 \quad f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1)$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy \quad f_{yy} = -2x^2$$

$$f_y = \frac{x^4}{y} \quad f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$$

$$f_y = 3y^2 - 6x \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 - 6y \quad (3)$$

$$f_{yx} = -6 \quad f_{xy} = 6 \quad f_{yy} = 6y$$

$$f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4)$$

$$f_{xy} = -3 \quad f_{yy} = 6y - 6$$

$$f_y = x^2 - 2xy \quad f_{xx} = 2y \quad f_x = 2xy - y^2 \quad (5)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y \quad f_{yy} = -2x$$

$$f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] \quad (6)$$

$$f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0]$$

$$, f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] \quad f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$$

$$f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$$

$$f_y = e^{xy} (x^2 + xy + 1) \quad f_x = e^{xy} (xy + y^2 + 1) \quad (7)$$

$$f_{xx} = e^{xy} \cdot y (xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy}$$

$$f_{yy} = e^{xy} \cdot x (x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy}$$

$$f_{xy} = e^{xy} \cdot x (xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy}$$

$$f_y = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2y) \quad f_x = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) \quad (8)$$

$$f_{xx} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2) e^{x+y}$$

$$f_{yy} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2) e^{x+y}$$

$$f_{xy} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y}$$

$$f_y = e^{-x^2-y^2} (4y - 2x^2y - 4y^3) \quad f_x = e^{-x^2-y^2} (2x - 2x^3 - 4xy^2) \quad (9)$$

$$f_{xx} = e^{-x^2-y^2} (-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2) e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{yy} = e^{-x^2-y^2} (-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2) e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = e^{-x^2-y^2} (-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y) e^{-x^2-y^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

$$f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (\mathbf{10})$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (\mathbf{11})$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (\mathbf{12})$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_y = xz$$

$$f_{xz} = y$$

$$f_{xy} = z$$

$$f_{xx} = 0$$

$$f_x = yz \quad (\mathbf{13})$$

$$f_{zx} = y$$

$$f_z = xy$$

$$f_{yz} = x$$

$$f_{yy} = 0$$

$$f_{yx} = z$$

$$f_{zz} = 0$$

$$f_{zy} = x$$

$$-2 \quad (\mathbf{14})$$

$$-1 \quad (\mathbf{15})$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (\mathbf{16})$$

$$\frac{\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e}\right)}{16} \quad (\mathbf{17})$$

## חשבון אינפיניטסימלי

### פרק 5 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

#### תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים.....  
**34**

## כל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

### שאלות

**1)** נתון :  $x = 2u - v, y = u^2 + v^2, z = \ln(x^2 - y^2)$  :  
חשבו :  $z_u, z_v$

**2)** נתון :  $v = 4t + k, u = t^2 + 4m, z = e^{u-v}$  :  
חשבו :  $z_t, z_m, z_k$

**3)** נתון :  $z = f(x^2 - y^2)$  :  
הוכחו :  $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$

**4)** נתון :  $z = f(xy)$  :  
הוכחו :  $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$

**5)** נתון :  $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$  :  
הוכחו :  $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$

**6)** נתון :  $z = f(x-y, y-x)$  :  
הוכחו :  $z_x + z_y = 0$

**7)** נתון :  $w = f(x-y, y-z, z-x)$  :  
הוכחו :  $w_x + w_y + w_z = 0$

**8)** נתון :  $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$  :  
הוכחו :  $u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$

9) נתון:  $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$

$$\text{הוכיחו: } \frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$$

10) נתון:  $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\text{הוכיחו: } x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$$

11) נתון:  $u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$

$$\text{הוכיחו: } xu_x + yu_y + zu_z = 2u$$

12) נתון:  $h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$

$$\text{הוכיחו: } h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$$

13) נתון:  $u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$

הוכיחו:

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y} \quad \text{א.}$$

$$u_{xy} = u_{yx} \quad \text{ב.}$$

ג. חשבו את  $f'(0) = 2, g'(0) = 1$  אם ידוע ש-  $u_{xy}(1, \pi) = 1$ .

14) נתון:  $y = r \sin \theta, x = r \cos \theta, u = f(x, y)$

$$\text{א. הוכיחו: } (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$$

ב. הוכיחו:  $u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$

$$\text{ג. הוכיחו: } f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$$

**15)** נתון  $z = h(u, v)$ , ונתון כי  $u = f(x, y)$ ,  $v = g(x, y)$  מקיימות את משוואת

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

הוכחו כי:

א.  $u$ ,  $v$  מקיימות את משוואת לפלאס.

$$\nu_{xx} + \nu_{yy} = 0 \text{, } u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{, וכן}$$

$$h_{xx} + h_{yy} = \left( (u_x)^2 + (\nu_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$$

**16)** נתון  $y = r \sinh s$ ,  $x = r \cosh s$ ,  $u = f(x, y)$ :

$$(u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$$

**17)** פונקציה  $f(x, y)$  תקרא הומוגנית מסדר  $n$ , אם

הוכחו כי אם  $f$  הומוגנית, אז:

$$x \cdot f_x + y \cdot f_y = n \cdot f(x, y)$$

$$x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} + 2xyf_{xy} = n(n-1) \cdot f(x, y)$$

**תשובות סופיות**

$$z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \cdot 2u \quad (1)$$

$$z_t = e^{u-v} (1) \cdot 2t + e^{u-v} (-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1} (1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v} (-1) \cdot 1 \quad (2)$$

$$-e \cdot g. \quad (13)$$

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

# חשבון אינפיניטיסימלי

## פרק 6 - פונקציות הומוגניות- משפט אוילר

### תוכן העניינים

38 .....	1. פונקציות הומוגניות
41 .....	2. משפט אוילר

## פונקציות הומוגניות

### שאלות

**בשאלות 1-3** בדקו האם הפונקציה הומוגנית ומאייזה סדר :

$$f(x, y) = x^3 \sqrt{y} + y^3 \sqrt{x} \quad (1)$$

$$h(x, y) = \frac{\ln(e^{5x})}{\sqrt[3]{ex^6 - 7y^6}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \ln(4^x) \cdot g\left[\frac{\sqrt{xy}}{x+7y}\right] \quad (3)$$

**4)** נתון כי  $z = f(x, y)$  פונקציה הומוגנית מסדר 3.

$$f(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}} + \frac{1}{z(x, y)} - 4$$

במידה ואינה הומוגנית, השמיטו ממנה חלק, כך שתתקבל פונקציה הומוגנית.  
מהו סדר ההומוגניות של הפונקציה במקרה זה?

**5)** מצאו עבור איזה ערך של הפרמטר  $\alpha$ , כל אחת מהפונקציות הבאות הומוגניות.  
כמו כן, מצאו את סדר ההומוגניות עבור ה-  $\alpha$  שנמצאה.

$$f(x, y) = \frac{x^4 y + x y^\alpha}{4x + 10y} . \text{א.}$$

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}} (\ln \alpha x - \ln y) . \text{ב.}$$

6) בתרגיל זה נדגים את התכונה הבאה של פונקציות הומוגניות:  
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר  $n$ , אז אם נחלק אותה ב-  $x^n$ ,

$$\text{נקבל פונקציה של } \frac{y}{x}.$$

א. הדגימו את הטענה על הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2. \quad 1$$

$$f(x, y) = \sqrt{x+y}. \quad 2$$

ב. הוכחו את הטענה לעיל.

### הערה

ניסוח פורמלי של הטענה לעיל הוא:

אם פונקציה היא הומוגנית מסדר  $n$ , אז קיימת פונקציה  $(g(t))$ , כך ש-  $\frac{y}{x}$

$$\text{המקיימת } \frac{f(x, y)}{x^n} = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

7) תהינה  $f$  ו-  $g$  פונקציות ב-  $n$  משתנים, והומוגניות מסדר  $r_1$  ו-  $r_2$ , בהתאם.  
קבעו, לכל אחת מהפונקציות הבאות, אם היא הומוגנית ומאיזה דרגה:

$$f+g \quad \text{. א.} \quad \frac{(f)^2}{\sqrt[n]{g}} \quad \text{. ב.} \quad \frac{f}{g} \quad \text{. ג.} \quad f \cdot g \quad \text{. ד.}$$

8) נתון כי  $f$  פונקציה הומוגנית מסדר 4.

$$\text{ידוע כי } f(1,2) = 4, \quad f_x(1,2) =$$

$$\text{חשבו את } f(2,4), \quad f(0.5,1), \quad f_x(2,4), \quad f_{xx}(1.5,3).$$

9) נתונה פונקציה  $f(x, y) = x^4 + y^2 z(x, y)$   
ידוע כי  $z$  פונקציה הומוגנית מסדר 2 וכי  $f(4,10) = 1$ .

$$\text{א. חשבו את } f(2,5).$$

$$\text{ב. ידוע כי } f_x(1,1) = 4.$$

$$\text{חשבו את } f_x(a,a), \quad \text{לכל קבוע } a.$$

### תשובות סופיות

(1) הומוגנית מסדר 3.5.

(2) הומוגנית מסדר 1.

(3) הומוגנית מסדר 1.

(4) הפונקציה לא הומוגנית. על ידי השטחת חלקים מהפונקציה אפשר לקבל:

$$f(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{1}{z(x, y)} \quad \text{הומוגנית מסדר 3.}$$

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}} \quad \text{הומוגנית מסדר 2.}$$

$$f(x, y) = -4 \quad \text{הומוגנית מסדר 0.}$$

(5) א. עבור  $\alpha = 4$  הפונקציה הומוגנית מסדר 4. ב. הומוגנית מסדר 0 לכל  $\alpha > 0$ .

$$g(t) = \sqrt{1+t} \quad .2 \quad g(t) = 1-t+2t^2 \quad .1. \quad \text{ב. הוכחה.}$$

(6) א. הומוגנית מדרגה  $r_1 + r_2$ . ב. הומוגנית מדרגה  $r_1 - r_2$ .

$$\text{ג. הומוגנית מדרגה } .2r_1 - \frac{r_2}{n}$$

ד. הומוגנית מדרגה  $r_1$  רק אם  $r_1 = r_2$ . אחרת לא הומוגנית.

$$f_x(2, 4) = 80, \quad f_x(1.5, 3) = 33.75 \quad , \quad f(2, 4) = 64, \quad f(0.5, 1) = \frac{1}{4} \quad (8)$$

$$f_x(a, a) = 4a^3 \quad \text{ב.} \quad f(2, 5) = \frac{1}{16} \quad \text{א.} \quad (9)$$

## משפט אוילר

### שאלות

**1)** נתונה הפונקציה  $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$ .

- א. הוכיחו שהפונקציה הומוגנית ומצאו את דרגתה.
- ב. הראו שמשפט אוילר מתקיים.

**2)** ענו על הסעיפים הבאים :

- א. נניח ש-  $f(x, y) = f(y)$  הומוגנית מסדר 0.

$$\frac{f_x}{f_y} = -\frac{y}{x}$$

$$\cdot f(x, y) = \frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{(x-y)(\ln x - \ln y)}$$

$$\text{הוכיחו כי } x \cdot f_x = -y \cdot f_y$$

**3)** ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו כי פונקציית התועלת  $u(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$  הומוגנית.

הניחו כי  $m$  קבוע חיובי.

- ב. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנזירות, כי  $u_y(a, a) = u_y(1, 1)$ .

- ג. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנזירות, כי  $1 = u_x(2, 2) + u_y(2, 2)$ .

**4)** תהי  $f$  פונקציה הומוגנית מסדר 2.

$$h(x, y) = x^2 - y^2 + f\left(\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x}\right)$$

- א. הוכיחו כי  $h$  הומוגנית מסדר 2.

- ב. נתון  $h(8, 1) = 16$ ,  $h_x(6, 3) = 9$ .

מצאו את  $h_y(2, 1)$  ואת  $h(2, 1)$

5)  $h$  ו-  $g$  הין פונקציות הומוגניות מסדר 2 ו-10, בהתאם. נגידר :

$$f(x,y) = (x+y)h(x,y) + \frac{\sqrt{g(x,y)}}{x^2 + y^2}$$

א. הוכיחו כי  $f$  הומוגנית מסדר 3.

ב. נתון :  $f'_x(2,16) = 12$ ,  $f'_y(1,8) = 3$ ,  $h(4,32) = 16$

מצאו את :  $f(1,8)$  ואת  $g(1,8)$

6)  $f$  הומוגנית מסדר 4,  $g$  הומוגנית מסדר 2 ו-  $h$  הומוגנית מסדר 0.

מגידרים את הפונקציה :  $p(x,y) = f(x,y) + g(x,y) - h(x,y)$

.  $f'_x(2,4) = 64$ ,  $f'_y(-1,-2) = -4$ ,  $h\left(\frac{1}{2},1\right) = \frac{5}{2}$ ,  $p(1,2) = \frac{7}{2}$  :

חשבו את  $g\left(\frac{1}{2},1\right)$

7) הפונקציה  $f(x,y)$  הומוגנית מסדר 3, והנתונים בشرطוט.

א. מצאו את שיעורי הנקודה B.

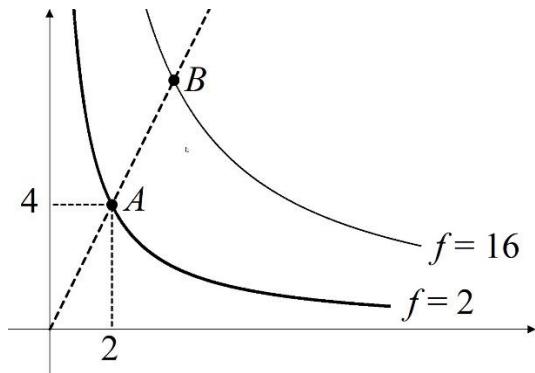
ב. מצאו את ערך הסכום  $f_x(4,8) + 2f_y(4,8)$

ג. נגידר פונקציה חדשה  $u(x,y) = (f(x,y))^2$ , על ידי

1. לפי כללי הגזירה, מתקיים  $u_x(x,y) = 2 \cdot f(x,y) \cdot f'_x(x,y)$   
הסבירו זאת בקצרה.

2. הוכיחו כי  $x \cdot u_x(x,y) + y \cdot u_y(x,y) = 6(f(x,y))^2$

היעזרו בתת-הסעיף הקודם ובנתונים על  $f$ .



8) תהי  $f(x, y)$  פונקציה הומוגנית מסדר  $m$ ,

$$\text{המקיימת } f(2,1) = 243 \text{ ו- } f(6,3) = 27.$$

א. מצאו את סדר ההומוגניות  $m$ .

ב. בנקודה  $(2,1)$  עוברתعش"ע בנקודה הניל.

$$\text{המשיק הוא } 2x + 3y = 7.$$

$$\text{מצאו את } f_x(2,1), f_y(2,1), f_x(1,0.5).$$

9) תהי  $(t) g$  פונקציה של משתנה אחד.

על הפונקציה  $g$  ידוע, כי  $g(4) = 5, g(1) = 3, g'(8) = 2$

$$\text{המשתנה } t \text{ תלוי במשתנים החזיביים } (x, y), \text{ כך: } t = \frac{4y}{x}.$$

נגיד תועלת  $u$  כפונקציה של המשתנים  $(x, y)$ , באופן הבא:

$$u(x, y) = g(t) = g\left(\frac{4y}{x}\right)$$

א. באյור שלහן קרו עם שיפוע 1.

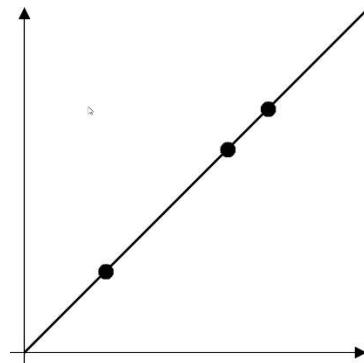
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרכן?

ב. הוכחו כי  $\frac{\partial u}{\partial x} = -4y$  היא עקומת אדישות של התועלת.

ציירו את הקרכן הזאת ורשמו באյור מה הערך של התועלת.

ג. הוכחו כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

$$\text{ד. הוכחו כי } u(1,2) = -16.$$



10) נניח ש-  $f(x, y) = f$  הומוגנית מסדר 1.

$$\text{הוכחו כי } x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy} = 0.$$

**11)** מפעל מייצר  $x$  חולצות ו-  $y$  מכנסים.

הרווח השולי, המתקבל מייצור כל אחד מהמוצרים, נתון על ידי:

$$f_x(x, y) = 4x + 8y, \quad f_y(x, y) = 8x + 20y \text{ נס' יחידה.}$$

מצאו את פונקציית הרווח של המפעל, אם ידוע שפונקציה זו הומוגנית.

**12)** לחברת 'מזון בריאות' יש 300 מכונות:

$x$  מכונות לייצור שוקולד ו-  $y$  מכונות לייצור גלידה.

ידוע כי התפוקה השולית, המתקבלת מייצור כל אחד מהמוצרים,

$$\text{נתונה על ידי } f_x(x, y) = 6x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \quad f_y(x, y) = 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

א. מצאו את פונקציית הייצור, אם ידוע שהיא הומוגנית.

ב. מצאו כמה מכונות מכל סוג על המפעל להחזיק, כדי לקבל את התפוקה הכוללת המקסימלית.

הערה: סעיף ב אינו קשור להומוגניות ו עוסק בנושא "בעיות קיצוץ תחת אילוץ".

**13)** בחברת 'שוקולד פנדיה' בדקנו ומצאו, כי התפוקה השולית, המתקבלת משימוש

$x$ -טון סוכר ו-  $y$ -טון קקאו, נתונה על ידי  $f_y(x, y) = 2x^3y^2$ ,  $f_x(x, y) = 3x^2y^3$ .

מחירי המוצרים הם 6,000 נס' לטון סוכר ו- 4,000 נס' לטון קקאו, והתקציב ל垦ניית המוצרים הוא 100,000 נס'.

א. מצאו את פונקציית הייצור, אם ידוע שהיא הומוגנית.

ב. מצאו את כמות הסוכר והקקאו בהם מתקבלת תפוקה מקסימלית.  
מהי התפוקה במקרה זה?

ג. כיצד תשנה התשובה, אם מחירי הסוכר והקקאו יהיו שניהם 5,000 נס'

לטון?

הערה: סעיפים ב-ג אינם קשורים להומוגניות ועסקים בנושא "בעיות קיצוץ תחת אילוץ".

**14)** הוכחו או הפריכו:

א. אם  $f_x(x, y)$  הומוגנית מסדר 4, אז  $f(y, x)$  הומוגנית מסדר 5.

ב. אם פונקציה  $f(x, y)$  מקיימת  $f(2, 4) = 2^3 f(1, 2)$ ,

אז הפונקציה הומוגנית מסדר 3.

תשובות סופיות

- ### 1) שאלת הוכחה.

- 2) שאלת הוכחה.

- 3) שאלת הוכחה:

$$h_y(2,1) = 8 \quad h(2,1) = 4 \quad .\blacksquare$$

- #### א) שאלת הוכחה:

$$f(1,8)=9, \quad g(1,8)=0 \text{ . ב}$$

- ## 5) א. שאלת הוכחה.

$$-\frac{3}{4} \quad (6)$$

ג. הוכחה והסביר.

$$f_x(2,1) = \frac{108}{7}, \quad f_y(2,1) = \frac{3\left(\frac{108}{7}\right)}{2}, \quad f_x(1,0.5) = \frac{54}{7} . \blacksquare$$

9) א. 5 ב-ד. שאלת הוכחה.

10) שאלות

**10) שאלת הוכחה.**

$$f(x, y) = 2x^2 + 8xy + 10y^2 \quad (11)$$

12) א.  $f(x, y) = 9x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$  ב. על המפעל להחזיר 200 מכונות לייצור שוקולד ו-100 מכונות לייצור גלידה, כדי לקבל תפוקה מקסימלית.

$$f(x, y) = x^3 y^2 \quad .\text{N} \quad (13)$$

ב. אם המפעל ישמש ב-10 טון סוכר ו-10 טון קקאו, הוא יקבל תפוקה מקסימלית השווה ל- $f(10,10) = 10^3 \cdot 10^2 = 100000$ .

ג. התשובה לא תשנה.

14) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.

# חשבון אינפיניטסימלי

## פרק 7 - אינטגרלים כפולים

### תוכן העניינים

46 .....	1. אינטגרלים כפולים .....
49 .....	2. החלפת סדר אינטגרציה .....

## אינטגרלים כפולים

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-3 :

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy \quad (1)$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr \quad (3)$$

באינטגרל  $\iint_D f(x,y) dx dy$ , הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר :

. B(1,1), A(1,0), O(0,0) : D – משולש בעל הקודקודים : (4)

. B(-2,1), A(2,1), O(0,0) : D – משולש בעל הקודקודים : (5)

. C(0,1), B(1,2), A(1,0), O(0,0) : D – טרפז בעל הקודקודים : (6)

.  $x^2 + y^2 \leq 1$  – עיגול D – (7)

.  $x^2 + y^2 \leq y$  – עיגול D – (8)

$$D = \{ (x,y) | y \leq 1, y \geq x^2 \} \quad (9)$$

$$D = \{ (x,y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \} \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\iint_D xy^2 dxdy \quad (11)$$

כאשר  $D$  חסום ע"י הפרבולה  $y^2 = 4x$  והישר  $x=1$ .

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{4-x}} \quad (12)$$

כאשר  $D$  חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה  $(2,2)$ .

$$\iint_D |xy| dxdy \quad (13)$$

כאשר  $D$  עיגול בעל הרדיוס  $a$ , שמרכזו בראשית.

$$\iint_D (x^2 + y^2) dxdy \quad (14)$$

כאשר  $D$  מקבילית בעלת הצלעות  $y = 3a, y = a, y = x+a, y = x$ . ( $a > 0$ )

$$\iint_D \frac{\cos y}{y^2 + \pi^2} dA \quad (15)$$

כאשר  $D$  התוחם הכלוא בין  $x = -1, y = 0, y = \pi, y = \pi\sqrt{x}$ .

**תשובות סופיות**

1 (1)

$$\frac{1}{40} \quad (2)$$

$$\frac{a^3}{3}\pi \quad (3)$$

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y) dx \quad (4)$$

$$\int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x,y) dy + \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x,y) dx \quad (5)$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x,y) dx \quad (6)$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1-x^2}{4}}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1-x^2}{4}}} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y) dx \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \\ & + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{32}{21} \quad (11)$$

$$8 - \frac{16\sqrt{2}}{3} \quad (12)$$

$$\frac{a^4}{2} \quad (13)$$

$$14a^4 \quad (14)$$

$$0 \quad (15)$$

## החלפת סדר אינטגרציה

### שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות 1-6:

$$\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y) dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x,y) dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y) dy dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y) dy dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x,y) dy dx \quad (6)$$

$$\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy dx \quad (5)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז: שנו את סדר האינטגרציה):

$$\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx dy \quad (8)$$

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy \quad (7)$$

$$\int_0^4 \int_x^4 \sin(y^2) dy dx \quad (10)$$

$$(x,y \geq 0) \int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2} y dx dy \quad (9)$$

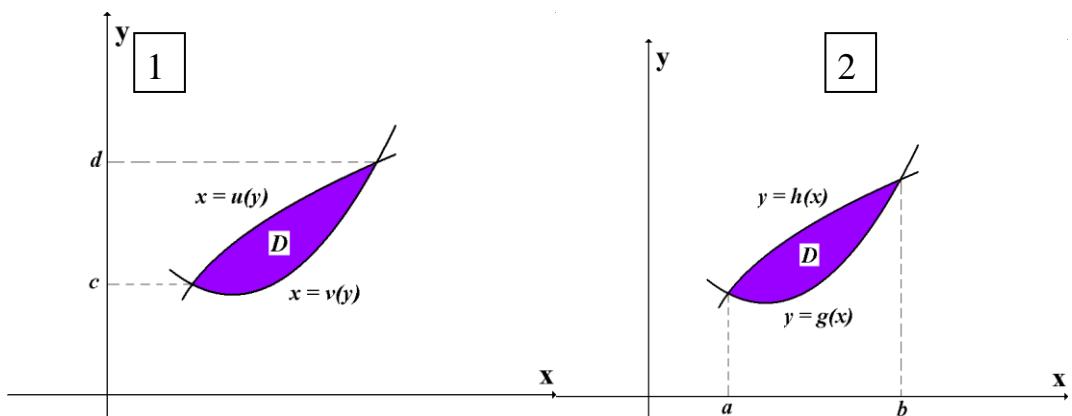
**הערות סימון**

[1]

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

[2]

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$



שימו לב, ישנו מושג שבחם לא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל

$$\text{כ}\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx : \text{רישום זה אינו שגורி מאחר שכפל}$$

הוא חילופי. כלומר הרישומים  $dy dx$  ו-  $dx dy$  זהים.

### תשובות סופיות

$$\int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x,y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x,y) dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y) dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y) dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y) dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx \quad (5)$$

$$\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x,y) dx \quad (6)$$

$$\frac{1}{3}(e^8 - 1) \quad (7)$$

$$\frac{241}{60} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4}(e - 2) \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 16) \quad (10)$$

# חשבון אינפיניטסימלי

## פרק 8 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

### תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים ..... 52

## קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

### שאלות

עבור כל אחת מהfonקציות בשאלות 1-8,  
מצאו נקודות קритיות וסווgoו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

9) נתון משטח  $z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$ .  
מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפchan 32 סמ"ק, חשבו את ממד htiba שטח הפנים שלה הוא מינימלי.

11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה  $(1, 2, 3)$  למישור  $z = -2x - 2y + z = 0$   
וכן את הנקודה על המישור הקרוב ביותר לנקודה הניל.

- (12)** יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.  
 עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$ 6 ועלות הייצור מחשבון בסין היא \$.8.  
 מנהל השיווק אומד את הביקוש  $Q_1$  למחשבון בארץ, ואת הביקוש  $Q_2$  למחשבון בסין, על ידי:  $Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$ ,  $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$ ,  $P_1$  ו-  $P_2$ , על מנת למකסם  
 כיצד צריכה הchnerה לקבוע את מחירי המחשבונים,  $P_1$  ו-  $P_2$ , את הרווח? מהו רוחח זה?

- (13)** נתונה הפונקציה  $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$ .  
 א. הוכיחו שהנקודה  $(0,0)$  היא נקודת קרייטית.  
 ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של  $a$  הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכף, או שלא ניתן לדעת.

- (14)** מצאו שני מספרים,  $a > b$ , כך ש-  $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$  יהיה מקסימלי.

## תשובות סופיות

- (1)** אוכף ;  $(-0.5, 1)$  מינימום.  
**(2)** מינימום ;  $(1, -2)$  ,  $(-1, 2)$  ;  $(-1, -2)$  אוכף.  
**(3)** אוכף ;  $(0, 0)$  מינימום.  
**(4)** אוכף.  $(-1, 0), (1, 1), (1, -1)$  ;  $(0, 1)$  מקסימום ;  $(-1, 1), (-1, -1)$  אוכף.  
**(5)** מקסימום.  
**(6)** מקסימום.  
**(7)** מקסימום.  
**(8)** אין נקודות קרייטיות.  
**(9)**  $z = 4$ ,  $z = 3$   
**(10)** רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.  
**(11)** מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר  $(1/3, 4/3)$ .  
**(12)**  $P_1 = 10\$, P_2 = 12\$$  רוחח מקסימלי \$ 288.  
**(13)** א. שאלת הוכחה. ב. עבור  $a = -2$ ,  $a = 2$ ,  $a < -2$ ,  $a > 2$ , לא ניתן לדעת ; אוכף ;  $a < -2$  – מינימום.  
**(14)**  $a = -6$ ,  $b = 4$

## חשבון אינפיניטיסימלי

פרק 9 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים  
הפחותיים

### תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה רבת משתנים .....

54

## **קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתוך) – ריבועיםՓחותים**

### **שאלות**

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות 1-5:

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$(z = f(x, y)) z^3 + z + xy - 2x - y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8 \quad (4)$$

$$(x, y, z > 0) f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (5)$$

6) מצאו מרחק מינימלי בין הפרבולה  $y = x^2 + 2x$ ,  $y = x^2 + 1$ , לפרבולה  $x = -y^2$ .

\* לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומי (מקורב) של משווה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות 7-11 נתונות  $n$  נקודות,  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , ויש למצוא קו עקום מהצורה  $y = h(x)$ , כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

$$\cdot (2, 2.5), (1, 0.8), (3, 3.2), (4, 3.5) \text{ הדגימו עבור הנקודות } h(x) = ax + b \quad (7)$$

$$\cdot (-1, 2), (2, 0), (0, -2) \text{ הדגימו עבור הנקודות } h(x) = ax^2 + bx \quad (8)$$

$$\cdot (10, 20.2), (6, 12.9), (4, 8.5), (0.5, 4) \text{ הדגימו עבור הנקודות } h(x) = ax + \frac{b}{x} \quad (9)$$

$$\cdot (4, 33), (2, 8.5), (0.5, 2.3), (1, 4.5), (0.1, 90) \text{ הדגימו עבור הנקודות } h(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2} \quad (10)$$

. $(1,4.5), (0.5,2.3), (0,0.8), (-1,0.1), (-0.5,0.12)$ , הדגימו עבור  $h(x) = ax^2 + bx + c$  (11)

**12)** נתונות  $n$  נקודות:  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ .  
 מצאו ישר  $y = ax + b$ , כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר  
 והנקודות יהיה מינימלי.  
 יש להגיע לנוסחה מפורשת עבור  $a$  ו-  $b$ .

הערה: בשאלות 11 ו-12 ניתן להניח ש-  $a$  ו-  $b$ , המתפללים מפתרון המשוואות  $f_a = 0$ ,  $f_b = 0$ ,  
 נוותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - y_i)^2$$

## תשובות סופיות

**1)** לכל  $t$  ממשי, מקסימום.

**2)** מקסימום.

**3)** אין קיצון. (1,2) אוכף.

**4)** אין קיצון. (1,2) אוכף.

**5)** מינימום.

**6)** 0.375

**7)**  $y = 0.88x + 0.3$

**8)**  $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$

**9)**  $y = 2.032x + \frac{1.5039}{x}$

**10)**  $y = 2.06x^2 + \frac{0.9}{x^2}$

**11)**  $y = 1.48x^2 + 2.196x + 0.824$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (12)$$

## חשבון אינפיניטסימלי

פרק 10 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנץ')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ ..... 56

## קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנץ')

### שאלות

בשאלות 1-4 מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון :

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

5) נתונה בעיית הקיצון  $\max_{x, y > 0} \{xy\}$  s.t.  $x + 3y = 12$ , כאשר  $x, y > 0$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

6) נתונה בעיית הקיצון  $\max_{x, y \geq 0} \{2x + y\}$  s.t.  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר  $x + 3y = 12$ ,

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

8) מבין כל הנקודות שעל העקומה  $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$ , מצאו את הנקודות

שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

9) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר  $3x - 6y + 4 = 0$

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$$

רמז : מרחק הנקודה  $(x_0, y_0)$  מהישר  $ax + by + c = 0$  הוא  $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

**10)** מושילה קונה בשוק  $x$  ק"ג מילפפונים ו-  $y$  ק"ג עגבניות.  
 התועלת מצricaת הסל,  $(x, y)$ , נתונה על ידי  $u(x, y) = \ln x + \ln y$ .  
 מחיר ק"ג מילפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.  
 מושילה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת  $\ln 16$ ,  
 והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימלית.  
 נסחו ופתרו את בעיית מושילה.

**11)** דני קונה בשוק  $x$  ק"ג מילפפונים ו-  $y$  ק"ג עגבניות.  
 התועלת מצricaת הסל  $(x, y)$ , נתונה על ידי  $u(x, y) = xy$ .  
 מחיר ק"ג מילפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.  
 לדני תקציב של 12 ש"ח.  
 נסחו ופתרו את בעיית דני.

**12)** עקומת התמורה בין מגנו,  $(x)$ , ואננס,  $(y)$ , היא  $x^2 + y^2 = 13$ .  
 לדני תועלת  $y = 4x + 6$ .  
 דני מחפש את הסל  $(\text{אננס, מגנו}) = (x, y)$ , על עקומת התמורה,  
 המביא למקסימום את התועלת שלו מצricaת מגנו ואננס.  
 נסחו ופתרו את הבעיה.

**13)** ליצרן פונקציית ייצור  $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$ .  
 המחירים ליחידת  $K$  ו-  $L$  הם  $P_K = 2$ ,  $P_L = 1$ .  
 היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף  $(K^*, L^*)$  המביא למינימום את העלות.  
 נסחו את בעיית היצרן (לא לפתרור).

**14)** נתונה בעיית קייצון תחת אילוץ  $p_1x + p_2y = I$ .  
 תהיו  $(x^*, y^*)$  נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב כללי של השקעה.  
 הוכיחו כי כופל לגראנו  $\lambda$  מקיים  $\frac{x \cdot u_x + y \cdot u_y}{I} = \lambda$  בנקודת הפתרון של הבעיה.

### תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min\left(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}\right) \quad \text{(1)}$$

$$\min(0, \pm 1) \quad \max(\pm 1, 0) \quad \text{(2)}$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad \text{(3)}$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad \text{(4)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(5)}$$

$$\max(9, 36) \quad \text{(6)}$$

$$(6, 2) \quad \text{(7)}$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min\left(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}\right) \quad \text{(8)}$$

$$7/\sqrt{45} \quad \text{(9)}$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad \text{(10)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(11)}$$

$$\max(2, 3) \quad \text{(12)}$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad \text{(13)}$$

(14) שאלת הוכחה.

## חשבון אינפיניטיסימלי

פרק 11 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים ..... 59

## קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

### שאלות

- 1)** מבין כל התוצאות הפתוחות שנפחו 32 סמ"ק, חשבו את ממדיו התיבה ששתה הפנים שלה הוא מינימלי.
- 2)** מצאו על פני הcéדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$  את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה  $(1,2,2)$ .
- 3)** ענו על השעיפים הבאים :
- מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה  $(1,2,3)$  למישור  $-2x - 2y + z = 0$ .
  - מצאו נקודה על המישור  $z = 2x - 2y$ , שהיא הקרובה ביותר לנקודה  $(1,2,3)$ .
  - בדקו את התשובה על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.
- 4)** מצאו את הנקודות על המשטח  $xy + 1 = z^2$  הקרובות ביותר לראשית.
- 5)** מצאו את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד  $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$  למישור  $3x + 4y + 12z = 288$ . רמז : מרחק הנקודה  $(x_0, y_0, z_0)$  מהמישור  $ax + by + cz + d = 0$  הוא  $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ .
- 6)** מצאו מרחק מינימי ומקסימלי בין העוקם המתකל מחיתוך הגליל  $x^2 + y^2 = 1$  והמישור  $x + y + z = 0$  לבין ראשית הצירים.
- 7)** מצאו מרחק מינימי ומקסימלי בין העוקם המתකל מחיתוך האליפסואיד  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$  והמישור  $x + y + z = 0$ , לבין ראשית הצירים.

### הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פיסיקליים או גיאומטריים, היות ומדובר בעוויות מעשיות. ישנן דרכי מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

### תשובות סופיות

- (1) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה  $(2, 4, 4)$ , והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה  $(-2, -4, -4)$ .
- (3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.  
ב. הנקודה הקרובה ביותר  $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$ .
- (4)  $(0, 0, 1), (0, 0, -1)$
- (5) המרחק הקצר ביותר  $\frac{256}{13}$ . המרחק הארוך ביותר  $\frac{320}{13}$ .
- (6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי  $\sqrt{3}$ .
- (7) מרחק מינימלי  $\frac{75}{17}$ . מרחק מקסימלי 10.

## חשבון אינפיניטסימלי

פרק 12 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה.....61

## קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה

### שאלות

- (1) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של  $f(x,y) = 3xy - 6x - 3y + 7$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם  $(0,5), (3,0), (0,0)$ .
- (2) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של  $f(x,y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם  $(2,0), (2,2), (0,2), (0,0)$ .
- (3) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של  $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא העיגול  $x^2 + y^2 \leq 4$ .
- (4) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של  $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור  $. R = \{(x,y) | x+y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$
- (5) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של  $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור  $. R = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$

### תשובות סופיות

- (1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.
- (2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.
- (3) מקסימום מוחלט  $\frac{33}{4}$ . מינימום מוחלט  $-\frac{1}{4}$ .
- (4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.
- (5) מקסימום מוחלט  $\sqrt{10} + 1$ . מינימום מוחלט  $1 - \sqrt{10}$ .